Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
27 Januari 2006, 09.00–12.00 uur

1. Beschouw het Cauchy probleem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \quad u(x,y) = 1 \quad \text{als} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

   (a) Toon aan dat dit probleem niet goed gesteld is.
   Aanwijzing: beschouw de karakteristieken.

   (b) Maak het probleem goed gesteld door de waarde slechts op een stuk van de cirkel voor te schrijven.

   (c) Geef in dit laatste geval de oplossing $u(s,\tau)$, en, zo mogelijk, $u(x,y)$.

2. Beschouw voor $0 \leq \alpha < c$ de gedempte golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t},$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Substitueer $u(x,t) = X(x)T(t)$.

   (a) Toon aan dat dezelfde eigenwaarden k^2 en eigenfuncties $\sin kx$ optreden met $k \in \mathbb{N}$ als bij het ongedempte geval $\alpha = 0$.

   (b) Bepaal voor $k \in \mathbb{N}$ de bijbehorende vergelijking voor $T(t)$.

   (c) Laat zien dat de algemene oplossing voor $u(x,t) = X(x)T(t)$ bij $k \in \mathbb{N}$ gegeven wordt door

$$e^{-\alpha t}\left[a_k \cos\sqrt{k^2c^2 - \alpha^2}t + b_k \sin\sqrt{k^2c^2 - \alpha^2}t\right] \sin kx.$$

   (d) Bepaal de coefficienten a_k en b_k.

3. Beschouw de warmte-geleidingsvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

met de randvoorwaarden

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = a, \quad u(\pi,t) = b, \quad t > 0. \end{cases}$$

zie ommezijde

(a) Laat zien dat de vergelijking en de randvoorwaarden vereenvoudigd kunnen worden door een geschikte keuze van $w(x)$ in de substitutie $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.

(b) Geef de oplossing van het oorspronkelijke probleem voor $t \longrightarrow \infty$. Beargumenteer het antwoord.

4. Bepaal u als oplossing van de Laplace vergelijking in $\mathbb{R}^2$ die begrensd is op $x^2 + y^2 \leq 1$, als gegeven is dat u radiaal-symmetrisch is, dat wil zeggen alleen van $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ afhangt.
Aanwijzing: Laat zien dat met $u(x,y) = G(r)$ geldt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = G''(r) + \frac{1}{r}G'(r), \quad (x,y) \neq (0,0).$$